III ტური

1. კონგრესზე შეიკრიბა 2012 დელეგატი. თითოეულმა იცის რამდენიმე უცხო ენა. აღმოჩნდა, რომ ყოველი სამი დელეგატიდან ყოველ ორს შეუძლია ერთმანეთთან ისაუბროს უშუალოდ ან მესამე დელეგატის საშუალებით. დაამტკიცეთ, რომ ეს 2012 დელეგატი შეგვიძლია დავაბინაოთ სასტუმროს 1006 ნომერში ორ-ორად ისე, რომ ერთ ნომერში მცხოვრები დელეგატები შეძლებენ ერთმანეთთან საუბარს.

ამოხსნა

განვიხილოთ ნებისმიერი ორი დელეგატი, რომლებსაც ერთმანეთთან უშუალოდ საუბარი შეუძლიათ და დავაბინაოთ ისინი სასტუმროს ნებისმიერ ნომერში. დარჩენილი 2010 დელეგატიდან კვლავ განვიხილოთ ისეთი ორი, რომლებმაც საერთო ენა იცის და ისინიც დავაბინაოთ სასტუმროს დარჩენილი 1005 ნომრიდან რომელიმეში. ეს პროცესი გავაგრძელოთ მანამდე, სანამ არ დაგვრჩება 4 დელეგატი და 2 ნომერი. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ოთხი დელეგატი რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას, შეგვიძლია დავაბინაოთ 2 ნომერში ორ-ორად, ისე რომ თითოეულ ნომერში მცხოვრებ დელეგატები შეძლებენ ერთმანეთთან საუბარს. ამით ცხადია ამოცანის ამოხსნა დასრულდება.

სიტუაცია გამოვსახოთ გრაფის სახით. აღვნიშნოთ ეს დელეგატები ციფრებით 1, 2, 3, 4 და ის პიროვნებები, რომლებსაც შეუძლიათ ერთმანეთთან უშუალოდ საუბარი შევაერთოდ წიბოთი. ცხადია, რომ ყოველ მათგანს შეუძლია დარჩენილი სამიდან რომელიმესთან საუბარი.

ახლა დავუშვათ საწინააღმდეგო, ანუ დავუშვათ, რომ ეს ოთხი პიროვნება არ შეგვიძლია დავაბინაოთ წყვილ-წყვილად ორ ოთახში ისე რომ ისინი შეძლებენ ერთმანეთთან საუბარს. ეს ნიშნავს, რომ გრაფი არ შეიცავს 1-2 წიბოს ან 3-4 წიბოს, ასევე არ შეიცავს 1-3-ს ან 2-4-ს და ასევე არ შეიცავს 1-4-ს ან 2-3-ს.

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ გრაფი არ შეიცავს 1-2 წიბოს. ახლა განვიხილოთ ორი შემთხვევა: ა) გრაფი არ შეიცავს 1-3 წიბოს; ბ) გრაფი არ შეიცავს 2-4 წიბოს.

ა) ამ შემთხვევაში გრაფში არ გვაქვს 1-2 წიბო და 1-3 წიბო. ამიტომ აუცილებლად უნდა გვქონდეს 1-4 წიბო. ეს კი ნიშნავს, რომ გრაფში არ გვაქვს 2-3 წიბო. ამრიგად მივიღეთ სამი წვერო 1, 2 და 3 რომლებიც ერთმანეთთან არ არიან შეერთებული. ეს კი ეწინააღმდეგება ამოცანის პირობას.

ბ)-ს შემთხვევაში, გვაქვს გრაფი რომელშიც არ გვაქვს 2-1 და 2-4 წიბოები. ამიტომ უნდა გვქონდეს 2-3 წიბო და არ უნდა გვქონდეს 1-4 წიბო. გამოდის, რომ 1, 2 და 4 წვეროები ერთმანეთთან არ არიან შეერთებული. ვღებულობთ კვლავ წინააღმდეგობას.

ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მოახდინა ამოცანის რედუქცია 2012-დან 2010-მდე , 2010 დან 2008 და ა. შ. დავიდა 4-მდე;

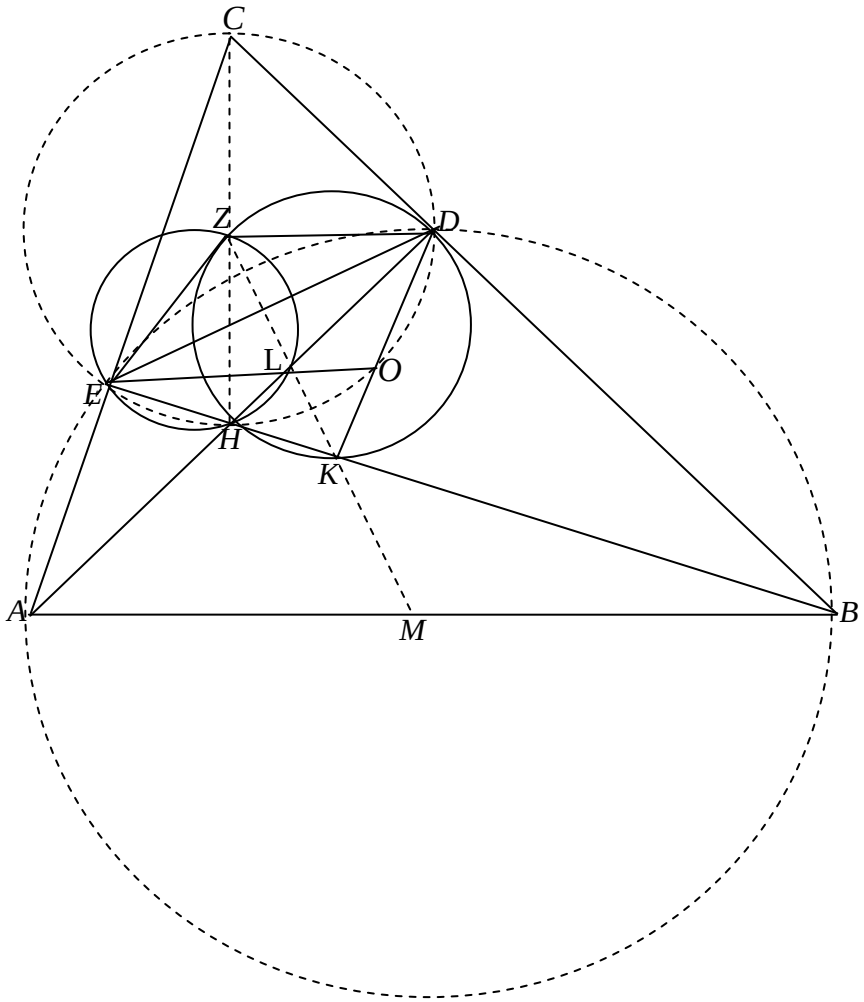
ბ) დაამტკიცა, რომ ამოცანის ამოხსნისთვის საკმარისია დაამტკიცო ამოცანა მხოლოდ 4 დელეგატისთვის;
გ) 4 დელეგატისთვის განიხილა მხოლოდ კონკრეტული შემთხვევა;
დ) დაამტკიცა ამოცანა 4 დელეგატისთვის.

შეფასების სქემა

2 ქულა- ა)
3 ქულა- ა), ბ)
4 ქულა- ა), ბ), გ)
7 ქულა- ა), ბ), გ), დ)

2. ვთქვათ H არის ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო O არის ამავე სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. A და B წვეროებიდან გავლებული სიმაღლეების ფუძეებია შესაბამისად D და E წერტილები. OD და BE წრფეები იკვეთებიან K წერტილში, ხოლო OE და AD წრფეები იკვეთებიან L წერტილში. ვთქვათ Z არის HKD და HLE სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირების მეორე გადაკვეთის წერტილი, ხოლო M არის AB გვერდის შუაწერტილი. დაამტკიცეთ, რომ თუ Z არის EOD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი, მაშინ K, L და M წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე.

ამოხსნა



ვთქვათ Z არის EOD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. მაშინ

$$90^\circ - \angle KDE = 90^\circ - \angle ODE = \angle ZEO = \angle ZEL = \angle ZHD = \angle ZKD,$$

საიდანაც ვიღებთ $\angle ZKD + \angle KDE = 90^\circ$, ამიტომ ცხადია, რომ $ZK \perp ED$. მაშასადამე ZK წრფე არის ED მონაკვეთის შუა წერტილზე გამავალი პერპენდიკულარი. ამავე დროს

$$\angle LZE = \angle DHK = \angle DZK = \frac{1}{2}\angle DZE,$$

ე.ი. ZL წრფეც არის ED მონაკვეთის შუა წერტილზე გამავალი პერპენდიკულარი. შესაბამისად Z, L და K წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ.

მეორე მხრივ $AEDB$ ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი იქნება M წერტილი, ხოლო ED იქნება EOD სამკუთხედზე და $AEDB$ ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირების საერთო ქორდა, ამიტომ ამ წრეწირების Z და M ცენტრებზე გამავალი წრფე იქნება ED მონაკვეთის შუა წერტილზე გამავალი პერპენდიკულარი. ამრიგად, Z, L, K და M წერტილები ED მონაკვეთის შუა წერტილზე გამავალ პერპენდიკულარზეა განლაგებული. დამტკიცება დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $\angle ZKD + \angle KDE = 90^\circ$;

ბ) დაადგინა, რომ ZK წრფე არის ED მონაკვეთის შუა წერტილზე გამავალი პერპენდიკულარი;

გ) დაადგინა, რომ $\angle LZE = \frac{1}{2}\angle DZE$;

დ) დაადგინა, რომ ZL წრფე არის ED მონაკვეთის შუა წერტილზე გამავალი პერპენდიკულარი;

ე) დაადგინა, რომ Z, L და K წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ;

ვ) დაადგინა, რომ $AEDB$ ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი იქნება M წერტილი,

ზ) დაადგინა, რომ L, K და M წერტილები ერთ წრფეზეა განლაგებული.

შეფასების სქემა

1 ქულა- ა)
2 ქულა- ა), ბ)
3 ქულა- ა), ბ), გ)
4 ქულა- ა), ბ), გ), დ)
5 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

3. ვთქვათ მოცემულია $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ მთელი დადებითი რიცხვების მიმდევრობა, რომლისთვისაც სრულდება $a_{n+1} = a_n + \left[\sqrt{a_n}\right]$ ყოველი $n \geq 1$ ნატურალური რიცხვისთვის. (ჩანაწერი $[x]$ აღნიშნავს x რიცხვის მთელ ნაწილს). დაამტკიცეთ, რომ ყოველი m ნატურალური რიცხვისთვის არსებობს k ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ $k \geq m$ და a_k არის სრული კვადრატი.

ამოხსნა

ვთქვათ $a_m = i^2 + r$, სადაც $0 < r \leq 2i$. განვიხილოთ შემთხვევები: $r \leq i$ და $i < r \leq 2i$.

ვთქვათ $r \leq i$. მაშინ $a_{m+1} = i^2 + (i + r)$ და $a_{m+2} = i^2 + (2i + r) = (i+1)^2 + r - 1$. ანალოგიურად მივიღებთ $a_{m+4} = (i+2)^2 + r - 2$, ... , $a_{m+2r-2} = (i + r - 1)^2 + 1$, $a_{m+2r} = (i + r)^2$. ამრიგად a_{m+2r} არის სრული კვადრატი.

ახლა ვთქვათ $i < r \leq 2i$. მაშინ $a_{m+1} = i^2 + (i + r) = (i+1)^2 + r'$, სადაც $r' = r - i - 1 < i + 1$. ახლა ანალოგიურად წინა შემთხვევისა გვექნება:
$a_{m+3} = (i+2)^2 + (r' - 1)$, ... , $a_{m+2r'-1} = (i + r')^2 + 1$, $a_{m+2r'+1} = (i + r' + 1)^2$. ამრიგად $a_{m+2r'+1}$ არის სრული კვადრატი.

ამოხსნის ეტაპები

ა) ჩაწერა $a_m = i^2 + r$;
ბ) განიხილა შემთხვევა $r \leq i$ და დაადგინა, რომ $a_{m+1} = i^2 + (i + r)$;
გ) დაადგინა, რომ $a_{m+2} = i^2 + (2i + r) = (i+1)^2 + r - 1$;
დ) დაადგინა, რომ $a_{m+2r} = (i + r)^2$;
ე) განიხილა შემთხვევა $i < r \leq 2i$ და დაადგინა, რომ $a_{m+1} = i^2 + (i + r) = (i+1)^2 + r'$
ვ) დაადგინა, რომ $a_{m+3} = (i+2)^2 + (r' - 1)$;
ზ) დაადგინა, რომ $a_{m+2r'+1} = (i + r' + 1)^2$.

შეფასების სქემა

1 ქულა- ა)
2 ქულა- ა), ბ) ან ა), ე)
3 ქულა- ა), ბ), გ) ან ა), ე), ვ)
4 ქულა- ა), ბ), გ), დ) ან ა), ე), ვ), ზ)
5 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე) ან ა), ბ), ე), ვ), ზ)
6 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ) ან ა), ბ), გ), ე), ვ), ზ)
7 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)